

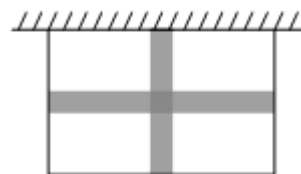
第4讲 二次函数实际问题（加油站）

一、实际应用问题

1. 面积问题

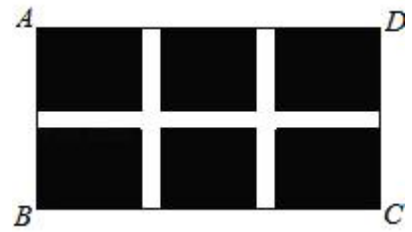
练习1

1. 广雅中学课外活动小组准备围建一个矩形花房，其中一边靠墙，另外三边由周长为50米的篱笆围成，已知墙长30米（如图所示），设这个花房垂直于墙的一边长为 x 米（花房中间修筑两条互相垂直的宽为2m的小路，剩余部分种植花卉）。

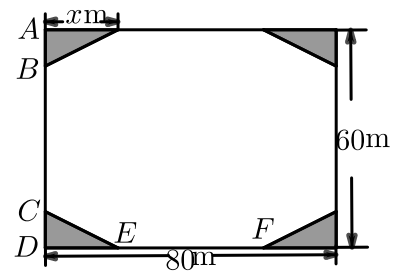


- （1）若平行于墙的一边长为 y 米，直接写出 y 与 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围。
- （2）设花房中种植花卉部分的面积为 S ，求 S 与 x 的函数关系。
- （3）垂直于墙的一边长为多少米时，面积 S 有最大值，求这个最大值。

2. 如图，小区规划在一个长 $80m$ ，宽 $40m$ 的长方形草坪上修建三条同样宽的甬道，使其中两条与 AB 平行，另一条与 BC 平行，场地的其余部分种草，甬道的宽度为 $a m$ 。



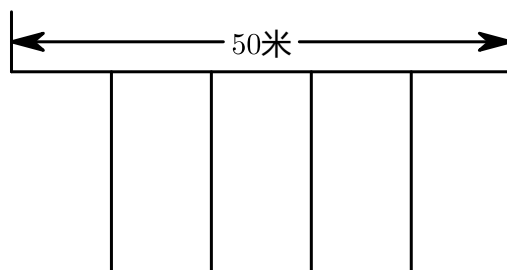
- (1) 用含 a 的代数式表示草坪的总面积 S ；
- (2) 如果每一块草坪的面积都相等，且甬道的宽为 $1m$ ，那么每块草坪的面积是多少平方米？
3. 应我市创建文明城市要求，某小区业主委员会决定把一块长 $80m$ ，宽 $60m$ 的矩形空地建成花园小广场，设计方案如图所示，阴影区域为绿化区（四块绿化区为全等的直角三角形），空白区域为活动区，且四周出口宽度一样，其宽度不小于 $36m$ ，不大于 $44m$ ，预计活动区造价 $60元/m^2$ ，绿化区造价 $50元/m^2$ ，设绿化区较长直角边为 $x m$ 。



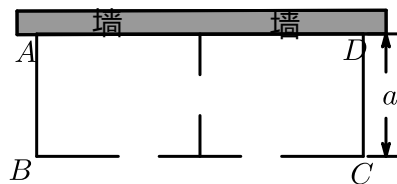
- (1) 求工程队总造价 y （元）与 $x(m)$ 的函数关系式，并求出 x 的取值范围。
- (2) 如果业主委员会最多投资 28.4 万元，能否完成全部工程？若能，请写出 x 为整数的所有工程方案；若不能，请说明理由。

练习2

4. 某农场拟建三间长方形种牛饲养室，饲养室的一面靠墙（墙长50m），中间用两道墙隔开（如图）。已知计划中的建筑材料可建墙的总长度为48m，则这三间长方形种牛饲养室的总占地面积的最大值为 _____ m^2 .

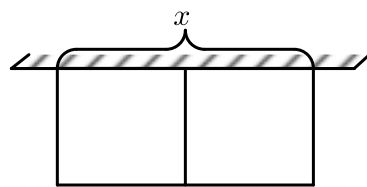


5. 某农场要建一个饲养场(长方形 $ABCD$)，饲养场的一面靠墙(墙最大可用长度为27米)，另三边用木栏围成，中间也用木栏隔开，分成两个场地，并在如图所示的三处各留1米宽的门(不用木栏)，建成后木栏总长57米，设饲养场(长方形 $ABCD$)的宽为 a 米 .



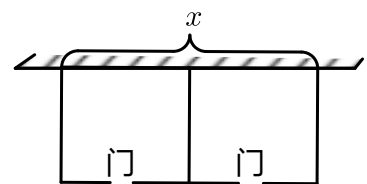
- (1) 饲养场的长为 _____ 米(用含 a 的代数式表示) .
- (2) 若饲养场的面积为 288m^2 ，求 a 的值 .
- (3) 当 a 为何值时，饲养场的面积最大，此时饲养场达到的最大面积为多少平方米？

6. 某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙（墙长足够长），中间用一道墙隔开（如图1所示）. 已知计划中的材料可建墙体总长46米，设两间饲养室合计长 x （米），总占地面积为 y （米²）.



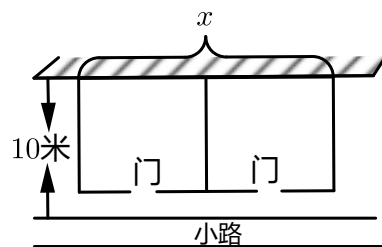
(图1)

- (1) 求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.
- (2) 现需要设计这两间饲养室各开一扇门（如图2所示），每扇门宽1米，门不采用计划中的材料.



(图2)

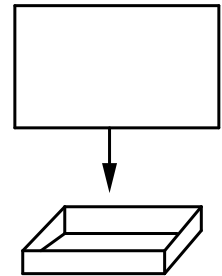
- ① 求总占地面积最大为多少米？
- ② 如图3所示，离墙10米外饲养室一侧准备修一条平行于墙的小路，若拟建的饲养室面积尽量大，饲养室的门口与小路的间隔为多少米？



(图3)

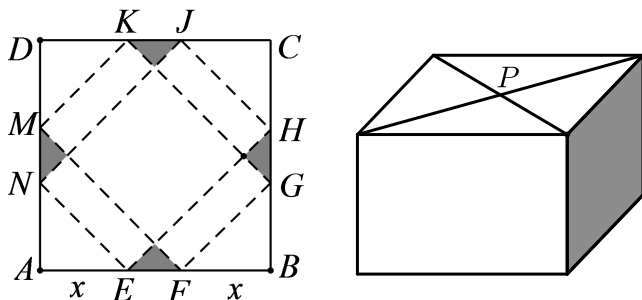
练习3

7. 工人师傅用一块长为 10dm ，宽为 6dm 的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形。（厚度不计）



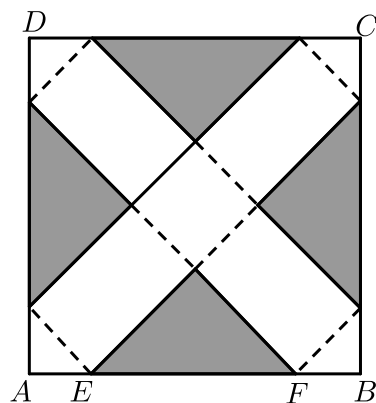
- (1) 在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体底面面积为 12dm^2 时，裁掉的正方形边长多大？
- (2) 若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

8. 如图所示, $ABCD$ 是边长为 60cm 的正方形硬纸片, 切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形, 再沿虚线折起, 使得 $ABCD$ 四个点重合于图中的点 P , 正好形成一个长方体形状的包装盒, E 、 F 在 AB 上是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点, 若广告商要求包装盒面积 $S\text{cm}^2$ 最大, 试求 x 应取何值? 设 $AE = FB = x\text{cm}$, 包装盒侧面积为 $S\text{cm}^2$.



- (1) 分析: 由正方形硬纸片 $ABCD$ 的边长为 60cm , $AE = FB = x\text{cm}$, 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.
为更好地寻找题目中等量关系, 将剪掉的阴影部分三角形集中, 得到边长为 EF 的正方形, 其面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$; 折起的四个角上的四个等腰直角三角形的面积之和为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.
- (2) 由以上分析: 用含 x 的代数式表示包装盒的侧面积 S 并求出问题的解.

9. 如图, 在边长为 24cm 的正方形纸片 $ABCD$ 上, 剪去图中阴影部分的四个全等的等腰直角三角形, 再沿图中的虚线折起, 折成一个长方体形状的包装盒 (A 、 B 、 C 、 D 四个顶点正好重合于上底面上一点). 已知 E 、 F 在 AB 边上, 是被剪去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点, 设 $AE = BF = x(\text{cm})$.



- (1) 若折成的包装盒恰好是个正方体, 试求这个包装盒的体积 V .
- (2) 某广告商要求包装盒的表面 (不含下底面) 面积 S 最大, 试问 x 应取何值?

2. 利润问题

练习4

10. 某商家销售一款商品，该商品的进价为每件80元，现在的售价为每件145元，每天可销售40件．商场规定每销售一件需支付给商场管理费5元．通过市场调查发现，该商品单价每降1元，每天销售量增加2件．若每件商品降价 x 元，每天的利润为 y 元，请完成以下问题的解答．

(1) 用含 x 的式子表示：

① 每件商品的售价为 _____ 元．

② 每天的销售量为 _____ 件．

(2) 求出 y 与 x 之间的函数关系式，并求出售价为多少时利润最大？最大利润是多少元？

11. 某商品的进价为每件20元，售价为每件30元，每个月可卖出180件；如果每件商品的售价每上涨1元，则每个月就会少卖出10件，但每件售价不能高于35元，设每件商品的售价上涨 x 元（ x 为整数），每个月的销售利润为 y 元．

(1) 求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围；

(2) 每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？

(3) 每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是1920元？

12. 某水果批发市场经销一种水果，如果每千克盈利10元，每天可售出500千克、经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克这种水果在原售价的基础上每涨价1元，日销售量将减少20千克．

(1) 如果市场某天销售这种水果盈利了6000元，同时顾客又得到了实惠，那么每千克这种水果涨了多少元？

(2) 设每千克这种水果涨价 x 元时 ($0 < x \leq 25$)，市场每天销售这种水果所获利润为 y 元．若不考虑其他因素，单纯从经济角度看，每千克这种水果涨价多少元时，市场每天销售这种水果盈利最多？最多盈利多少元？

13. 小明大学毕业回家乡创业，第一期培植盆景与花卉各50盆．售后统计，盆景的平均每盆利润是160元，花卉的平均每盆利润是19元．调研发现：

①盆景每增加1盆，盆景的平均每盆利润减少2元；每减少1盆，盆景的平均每盆利润增加2元．

②花卉的平均每盆利润始终不变．

小明计划第二期培植盆景与花卉共100盆，设培植的盆景比第一期增加 x 盆，第二期盆景与花卉售完后的利润分别为 W_1 ， W_2 （单位：元）．

(1) 用含 x 的代数式分别表示 W_1 ， W_2 ．

(2) 当 x 取何值时，第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润 W 最大，最大总利润是多少．

练习5

14. 某商店购进一种商品，每件商品进价30元．试销中发现这种商品每天的销售量 y （件）与每件销售价 x （元）的关系数据如下：

x	30	32	34	36
y	40	36	32	28

- （1）已知 y 与 x 满足一次函数关系，根据上表，求出 y 与 x 之间的关系式（不写出自变量 x 的取值范围）．
- （2）如果商店销售这种商品，每天要获得150元利润，那么每件商品的销售价应定为多少元？
- （3）设该商店每天销售这种商品所获利润为 w （元），求出 w 与 x 之间的关系式，并求出每件商品销售价定为多少元时，利润最大？
15. 小李在景区销售一种旅游纪念品，已知每件进价为6元，当销售单价定为8元时，每天可以销售200件，市场调查反映：销售单价每提高1元，日销量将会减少10件，物价部门规定：销售单价不能超过12元，设该纪念品的销售单价为 x （单位：元），日销量为 y （单位：件），日销售利润为 w （单位：元）．
- （1）求 y 与 x 的函数关系式．
- （2）要使日销售利润为720元，销售单价应定为多少元？
- （3）求日销售利润 w （单位：元）与销售单价 x （单位：元）的函数关系式，当 x 为何值时，日销售利润最大，并求出最大利润．

16. 俄罗斯世界杯足球赛期间，某商店销售一批足球纪念册，每本进价40元，规定销售单价不低于44元，且获利不高于30%，试销售期间发现，当销售单价定为44元时，每天可售出300本，销售单价每上涨1元，每天销售量减少10本，现商店决定提价销售．设每天销售量为 y 本，销售单价为 x 元．
- (1) 请直接写出 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围．
 - (2) 当每本足球纪念册销售单价是多少元时，商店每天获利2400元．
 - (3) 将足球纪念册销售单价定为多少元时，商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大．最大利润是多少元．

练习6

17. 超市销售某种儿童玩具，如果每件利润为40元（市场管理部门规定，该种玩具每件利润不能低于40元且不能超过60元），每天可售出50件．根据市场调查发现，销售单价每增加2元，每天销售量会减少1件．设销售单价增加 x 元，每天售出 y 件．
- (1) 请写出 y 与 x 之间的函数表达式．
 - (2) 当 x 为多少时，超市每天销售这种玩具可获利润2250元？
 - (3) 设超市每天销售这种玩具可获利 w 元，当 x 为多少时 w 最大，最大值是多少？

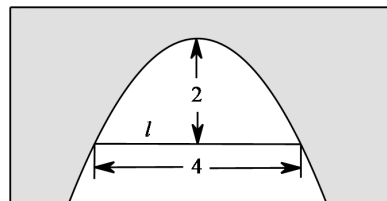
18. 某商场销售一种小商品，每件进货价为190元．调查发现，当销售价为210元时，平均每天能销售8件；当销售价每降低2元时，平均每天就能多销售4件．设每件小商品降价 x 元，平均每天销售 y 件．
- (1) 直接写出 y 与 x 之间的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）．
- (2) 商场要想使这种小商品平均每天的销售利润达到280元，求每件小商品的销售价应定为多少元？
- (3) 设每天的销售总利润为 w 元，求 w 与 x 之间的函数关系式；每件商品降价多少元时，每天的总利润最大？最大利润是多少？

二、 建立直角坐标系解决问题

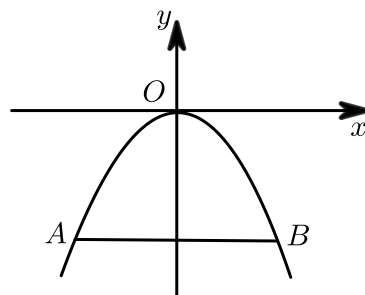
3. 拱桥问题

练习7

19. 图中是抛物线形拱桥，当水面宽为4米时，拱顶距离水面2米；当水面高度下降1米时，水面宽度为多少米？



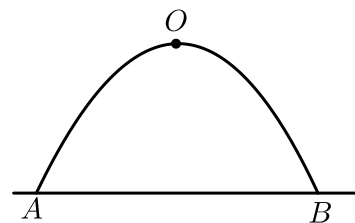
20. 某涵洞是抛物线形，它的截面如图所示，现测得水面宽 $AB = 1.6\text{m}$ ，涵洞顶点 O 到水面的距离为 2.4m .



- (1) 求出涵洞所在抛物线的函数表达式 .
 (2) 当水面宽 1.2m 时，水面上升多少米 .

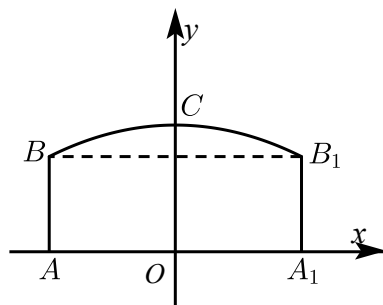
练习8

21. 某隧道洞的内部截面顶部是抛物线形，现测得地面宽 $AB = 10\text{m}$ ，隧道顶点 O 到地面 AB 的距离为 5m .



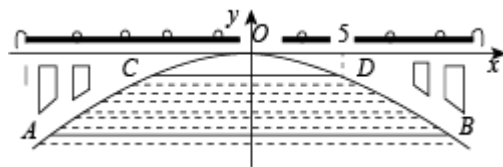
- (1) 建立适当的平面直角坐标系，并求该抛物线的解析式 .
 (2) 一辆小轿车长 4.5m ，宽 2m ，高 1.5m ，同样大小的小轿车通过该隧洞，最多能并排行驶多少辆？

22. 如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成．长方形的长为16m，宽6m，抛物线的最高点C离路面AA₁的距离为8m，以AA₁所在直线为x轴，以线段AA₁的中点为坐标原点建立平面直角坐标系．



- (1) 求出函数表达式．
 (2) 一大型货车装载设备后高为7m，宽为4m，如果隧道内设双向行驶车道，那么这辆货车能否安全通过？

23. 如图，有一座抛物线形拱桥，在正常水位时水面AB的宽为20米，如果水位上升3米，则水面CD的宽是10米．



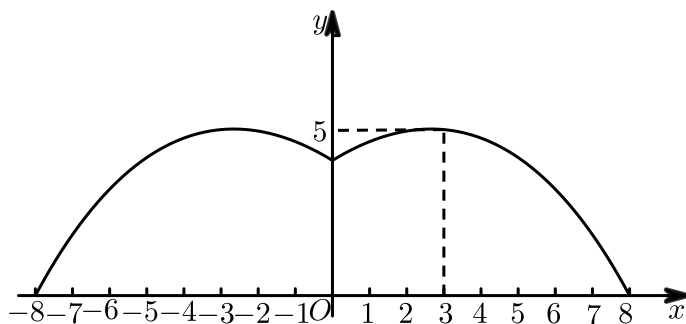
- (1) 建立如图所示的直角坐标系，求此抛物线的解析式．
 (2) 当水位在正常水位时，有一艘宽为6米的货船经过这里，船舱上有高出水面3.6米的长方体货物（货物与货船同宽）．问：此船能否顺利通过这座拱桥？

4. 轨迹问题

24. 已知飞机着陆后滑行距离 y （单位： m ）关于滑行的时间 t （单位： s ）的函数解析式是

$y = 60t - 1.5t^2$ ，那么飞机着陆后滑行 _____ s 才能停下来．

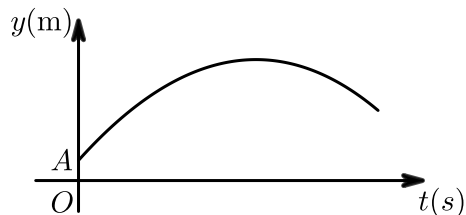
25. 某游乐园有一个直径为16米的圆形喷水池，喷水池的周边有一圈喷水头，喷出的水柱为抛物线，在距水池中心3米处达到最高，高度为5米，且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合．如图所示，以水平方向为 x 轴，喷水池中心为原点建立平面直角坐标系．



（1）求水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式．

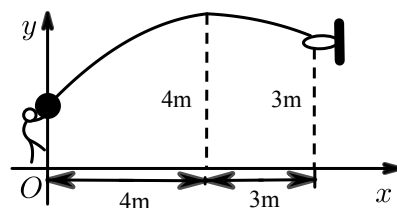
（2）王师傅在喷水池内维修设备期间，喷水管意外喷水，为了不被淋湿，身高1.8米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内．

26. 如图，某足球运动员站在点 O 处练习射门，将足球从离地面 0.5m 的 A 处正对球门踢出（点 A 在 y 轴上），足球的飞行高度 y （单位： m ）与飞行时间 t （单位： s ）之间满足函数关系 $y = at^2 + 5t + c$ ，已知足球飞行 0.8s 时，离地面的高度为 3.5m 。



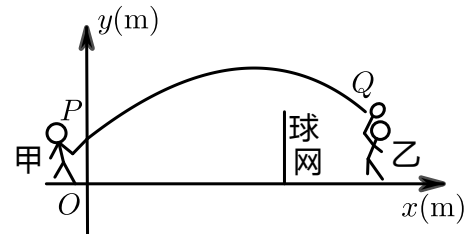
- (1) 足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度是多少？
- (2) 若足球飞行的水平距离 x （单位： m ）与飞行时间 t （单位： s ）之间具有函数关系 $x = 10t$ ，已知球门的高度为 2.44m ，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离为 28m ，他能否将球直接射入球门？

27. 在一次篮球比赛中，如图，队员甲正在投篮，已知球出手时离地面 $\frac{20}{9}\text{m}$ ，与篮圈中心的水平距离为 7m ，球出手后水平距离为 4m 时达到最大高度 4m ，设篮球运行轨迹为抛物线，篮圈距地面 3m 。



- (1) 建立如图所示的平面直角坐标系，问此球能否准确投中？
- (2) 若对方队员乙在甲面前 1m 处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为 3.1m ，那么他能否获得成功？

28. 甲、乙两人进行羽毛球比赛，羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分，如图，甲在 O 点正上方 1m 的 P 处发出一球，羽毛球飞行的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间满足函数表达式 $y = a(x - 4)^2 + h$ ，已知点 O 与球网的水平距离为 5m ，球网的高度为 1.55m 。



(1) 当 $a = -\frac{1}{24}$ 时：

① 求 h 的值。

② 通过计算判断此球能否过网。

(2) 若甲发球过网后，羽毛球飞行到距点 O 的水平距离为 7m 、离地面的高度为 $\frac{12}{5}\text{m}$ 的 Q 处时，乙扣球成功，求 a 的值。